

同步练习 P229 · 1. 理学院 廖国勇

1. 求 $\oint_S (x-y) dx dy + (y-z) dy dz$, 其中 S 是由柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 围成的空间区域的外侧.

解: 设 S 围成的区域为 Ω .

$$R = (x-y), \quad P = (y-z), \quad Q = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\oint_S (x-y) dx dy + (y-z) dy dz = \iiint_{\Omega} 0 dx dy dz = 0$$

注, 参考答案为 $-\frac{9}{2}\pi$, 不同。

同步练习 P229 2 理学院 廖国勇 2016.4.19

2. 求 $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 S 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$) 的外侧.

解: 设面 S' : $z=0$ ($x^2 + y^2 \leq a^2$), 下侧. S 与 S' 围成半球区域 Ω .

$$P=x, Q=y, R=z \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3$$

$$\iint_{S+S'} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iiint_{\Omega} 3 dx dy dz = 3 \cdot \frac{2}{3} \pi a^3 = 2\pi a^3$$

$$\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = 2\pi a^3 - \iint_{S'} x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

$$= 2\pi a^3 - \iint_{S'} x dy dz + y dz dx + 0 dx dy$$

$$= 2\pi a^3$$

同步练习 P229 3

理学院 廖国勇

2016.4.19

3. 求 $\oint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的内侧.

解: $P = x^3, Q = y^3, R = z^3$ $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$

$$\oint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$$

$$= - \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} 3(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^a 3r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr$$

$$= - 2\pi \int_0^\pi \frac{3}{5} a^5 \sin\varphi d\varphi$$

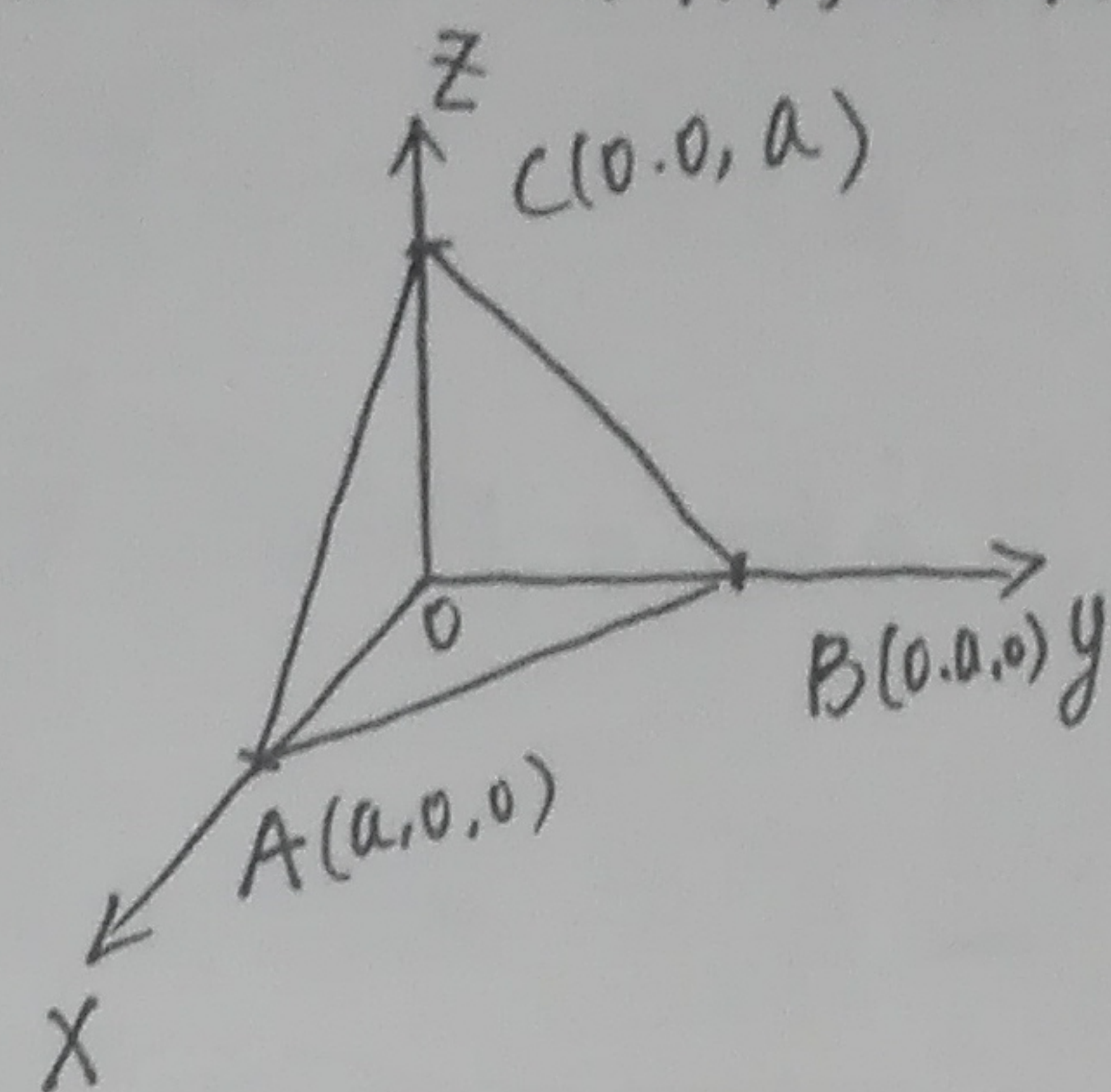
$$= - 2\pi \cdot \frac{6}{5} a^5 = - \frac{12}{5} \pi a^5$$

同步练习 P230 4 理学院 廖国勇

4. 求 $\oint_L (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$, 其中 L 是以点 $A(a,0,0)$

$B(0,a,0)$, $C(0,0,a)$ 为顶点的三角形沿 $ABCA$ 的方向的闭曲线

解: 设三角形 ABC 的曲面为 S , 则



$$\oint_L (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$$
$$= \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & y-x \end{vmatrix}$$

$$= \iint_S 2dydz + 2dzdx + 2dxdy$$

$$\iint_S dxdy = \iint_S dzdx = \iint_S dydz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy = \frac{1}{2}a^2$$

$$\text{于是, 原式} = 6 \cdot \frac{1}{2}a^2 = 3a^2$$

同步练习 P230 5 理学院 廖国勇

5. 求 $\oint_L 2y dx + 3x dy - z^2 dz$, 其中 L 是圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$, 且从 z 轴正向看下去时取逆时针方向.

解 方法一 直接算

$$L \text{ 的参数形式为 } \begin{cases} x = 3 \cos \theta \\ y = 3 \sin \theta \\ z = 0 \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\oint_L 2y dx + 3x dy - z^2 dz = \int_0^{2\pi} 2 \cdot 3 \sin \theta d(3 \cos \theta) + 3 \cdot 3 \cos \theta d(3 \sin \theta) - 0$$

$$= \int_0^{2\pi} (-18 \sin^2 \theta + 27 \cos^2 \theta) d\theta \quad \text{这里利用 } \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{18}{2} + \frac{27}{2}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta$$

$$= 9\pi$$

方法二, 用斯托克斯公式

圆域曲面 $S: z=0 (x^2+y^2 \leq 9)$

$$\oint_L 2y dx + 3x dy - z^2 dz = \iint_S \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \iint_S 0 dy dz + 0 dz dx + dx dy$$

$$= \iint_S dx dy = \pi \cdot 9$$

同步练习 P230 6 求 $\oint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, 其中 S 是曲面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的外侧

解: 设 S 围成的区域为 Ω , 显然 $\oint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{8} \oint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$

下面用四种方法来计算.

方法一, 利用两种曲面积分的关系

设 $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2=4$, $F_x=2x$, $F_y=2y$, $F_z=2z$, 即曲面上任一点 (x,y,z)

的法向量 $\vec{n} = (x,y,z)$, 单位法向量 $\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

于是, $\frac{1}{8} \oint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \frac{1}{8} \oint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) dS$

$$= \frac{1}{8} \oint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2} dS = \frac{1}{8} \oint_S 2 dS = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 4\pi \cdot 4 = 4\pi$$

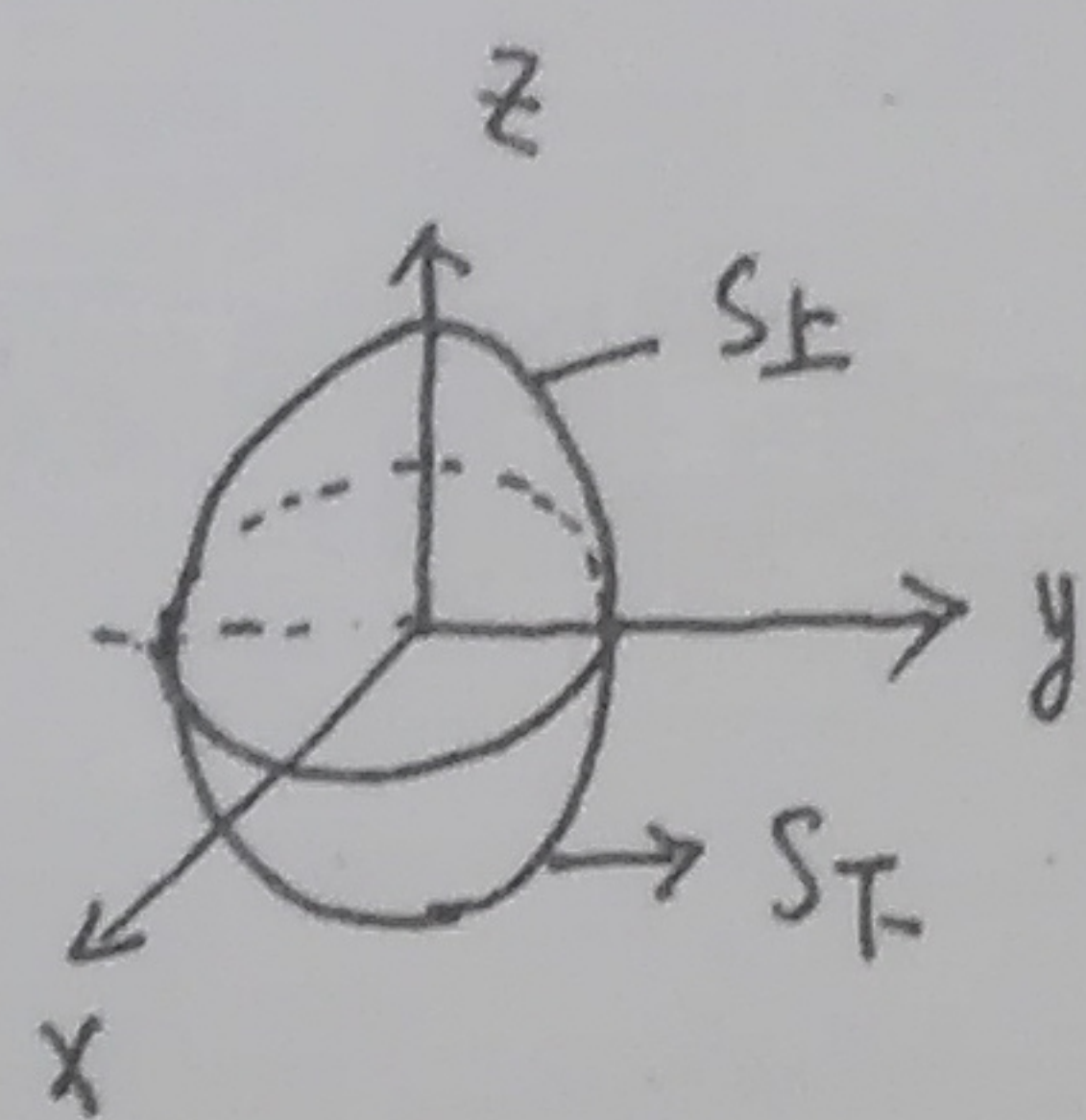
方法二, 利用坐标曲面积分的几何意义, 单位时间内流进曲面到指定侧的流量

$V = (x,y,z) // \vec{n} = (x,y,z)$, 于是 $\frac{1}{8} \oint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \frac{1}{8} \oint_S |V| dS$

$$= \frac{1}{8} \oint_S 2 dS = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 4\pi \cdot 4 = 4\pi$$

方法三. 直接算

设 $S_{\pm}: z = \pm\sqrt{4-x^2-y^2}$, $S_{\pm}$ 上侧, $S_{\pm}$ 下侧, $S = S_{\pm} + S_{\mp}$



$$\frac{1}{8} \oint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

$$= \frac{3}{8} \oint_S z dxdy = \frac{3}{8} \left(\oint_{S_{\pm}} z dxdy + \oint_{S_{\mp}} z dxdy \right)$$

$$= \frac{3}{8} \left(\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{4-x^2-y^2} dxdy - \iint_{x^2+y^2 \leq 4} -\sqrt{4-x^2-y^2} dxdy \right) = \frac{3}{4} \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{4-x^2-y^2} dxdy$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^2 \sqrt{4-p^2} \cdot p dp \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{3}{2} \pi \int_0^2 \sqrt{4-p^2} p dp \stackrel{p=2\sin\theta}{=} \frac{3}{2} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta \cdot 2\sin\theta \cdot 2\cos\theta d\theta$$

$$= 12\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = -4\pi \cos^3\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$$

方法四. 利用高斯公式

$$\frac{1}{8} \oint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dxdydz = \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} 3 dxdydz$$

$$= \frac{1}{8} \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = 4\pi$$

注, 一开始直接用高斯公式不对, 因为 $\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

在 $(0,0,0)$ 处没有定义, 但转换后 $p=x$, $q=y$, $r=z$ 就可用高斯公式